

1 Funciones vectoriales de varias variables reales

En la primera parte de este primer capítulo (Secciones 1.1 y 1.2) se presentan las nociones básicas que permiten definir el concepto de límite. Estos conceptos son los de producto escalar, norma y distancia. El límite de una función vectorial en un punto es un concepto fundamental, al igual que en el caso de funciones reales de variable real, ya que nos permitirá definir las derivadas direccionales y la diferenciabilidad. Se presenta asimismo un método práctico para determinar límites de funciones. La continuidad de funciones vectoriales de varias variables también se define a partir de un límite.

En la segunda parte (Secciones 1.3 a 1.6) se definen las derivadas direccionales –que en la dirección de los ejes dan lugar a las derivadas parciales– y el concepto de diferenciabilidad, con algunas diferencias destacables con respecto a las funciones reales de variable real. Finalmente, se presenta el polinomio de Taylor para funciones de varias variables reales, que permitirá obtener aproximaciones locales polinómicas de funciones alrededor de un punto.

1.1. Introducción y primeras definiciones: funciones vectoriales y funciones escalares

1.1.1. Funciones escalares de varias variables reales

Considérese un sistema masa-resorte. La energía total del sistema viene dada por la expresión

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

donde m representa a la masa, v la velocidad, k la constante del resorte y x su elongación.

En un circuito RLC, la energía almacenada es

$$E_2 = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

donde C representa la constante del condensador, L la inductancia de la bobina, i la corriente eléctrica y u el voltaje a nivel del condensador.

En ambos casos, E_1 y E_2 pueden considerarse como funciones de 2 variables: (v, x) en el primer caso y (u, i) en el segundo caso. De forma más precisa, se puede escribir

$$E_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

donde $j = 1, 2$.

Más generalmente se pueden definir funciones escalares de varias variables reales, es decir, definidas de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y funciones vectoriales de varias variables reales de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

1.2. Topología, límites y continuidad

Para definir los conceptos de límite y establecer la continuidad de funciones de varias variables, es necesario establecer algunas nociones acerca de la topología del espacio \mathbb{R}^n , como son el producto escalar, norma y distancia.

De esta manera, podremos hablar de \mathbb{R}^n como espacio euclídeo, en el que podremos calcular la distancia entre sus elementos, que llamaremos vectores.

Definición 1 (Conjunto \mathbb{R}^n). Se define el conjunto \mathbb{R}^n donde $n \in \mathbb{N}$ como

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Los elementos de \mathbb{R}^n se denotan por \mathbf{x} para diferenciarlos de x , que generalmente representa un número real.

Propiedad 1. El conjunto \mathbb{R}^n , junto con las operaciones de suma de vectores $+$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y producto por escalar \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidas como

- (i) $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
- (ii) $\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión n .

Para poder dotar al espacio \mathbb{R}^n de una estructura geométrica, es necesario introducir los conceptos de producto escalar, norma y distancia.

Definición 2 (Producto escalar). Un producto escalar en \mathbb{R}^n es una aplicación

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

que a cada par de vectores $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ les asocia un número real $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$. Además, esta aplicación ha de satisfacer las siguientes propiedades:

- (i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- (ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ (simetría del producto escalar)
- (iii) $\langle \lambda \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \lambda \in \mathbb{R}$
- (iv) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

Ejemplo 1. Un primer ejemplo de producto escalar es el que corresponde a la aplicación

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Puede comprobarse fácilmente que esta aplicación es, en efecto, un producto escalar.

- (i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i x_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i^2 = 0, \forall i \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- (ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
- (iii) $\langle \lambda \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i) y_i = \sum_{i=1}^n \lambda x_i y_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i y_i = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \lambda \in \mathbb{R}$
- (iv) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^n (x_i z_i + y_i z_i) = \sum_{i=1}^n x_i z_i + \sum_{i=1}^n y_i z_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

Definición 3 (Norma). Una norma en \mathbb{R}^n es una aplicación

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{x} &\rightarrow \|\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

que a cada vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ le asocia un número real no negativo $\|\mathbf{x}\| \in \mathbb{R}^+$. Además, esta aplicación ha de satisfacer las siguientes propiedades: